小売業者と顧客の振る舞いに関する一考察 (不確実性と意思決定の数理)

北條, 仁志

数理解析研究所講究録
第 1636 巻 2009 年 88-92

小売業者と顧客の振る舞いに関する一考察

大阪府立大学大学院 理学系研究科 情報数理科学専攻 北條仁志 (Hitoshi Hohjo)
Dept. of Mathematics and Infomation Sciences, Graduate School of Science
Osaka Prefecture University

1 はじめに

競合的在庫問題は, newsvendor games, the competitive newsboy problem, the competitive inventory problem などと呼ばれ, ゲーム理論および在庫管理理論の方面から盛んに研究されている (*e.g.* [12],[16],[18]). これらの研究では, 既知需要分布のもとでの小売業者間の問題として扱われており, 顧客の意思決定は含まれていない. 通常, 小売業者の戦略は顧客の行動に依存し, 顧客の行動は小売業者の戦略に依存する. それゆえ, 小売業者だけでなく, 顧客も意思決定者として捉えたモデルを構築する必要があると考える. 文献 [?] では, 2 人の小売業者と n 人の顧客に対して, すべての顧客が非常に強い購買意欲をもつ条件のもとでの競合的在庫問題を扱った.

本稿では, 顧客が購入に向かう前あるいは 1 つ目の小売業者を訪れた後に購買意欲を失う仮定をもつ問題について考察する. この問題を数理的モデルとして定式化し, 小売業者および顧客に対する Nash 平衡点を導出する.

2 モデル

2 人の小売業者 (Retailer j, $j=1,2$) がいて, n 人の顧客 (Customer i, $i=1,2,\ldots,n$) に対してある商品を販売する 1 期間競合的在庫問題を考える. Retailer j は初期在庫量 0 から出発し, リードタイム 0 で単位発注費用 c_j により在庫水準を z_j 単位まで引き上げる. 小売業者の発注は期首のみとする. 期末の在庫レベルに対して在庫がある場合には単位あたり h_j の在庫保管費用を負い, 不足している場合には単位あたり p_j の品切れ損失費用を負う. Retailer j の目的は, 発注, 在庫維持, 不足による品切れ損失, 販売を考慮に入れた期待総費用 C_r^j を最小にするような発注量 z_j を期首の時点で決定することである.

顧客は購買行動を起こすか, 起こさないかを決める. 購買行動に移るのであれば, Customer i は Retailer j に対する付加価値 e_{ij} を考慮した上で時刻 $1-\lambda-\max\{\lambda_{i1},\lambda_{i2}\}$ までに小売業者のもとへ移動し, 価格 r_j で 1 単位の商品を購入する. そこで, Customer i から Retailer j までの距離は λ_{ij}, 小売業者間の距離は λ であり, Customer i は移動時に単位距離当たり d_i の移動費用を負う. もし最初に訪れた小売業者で購入可能であれば, 商品を購入して自宅へ戻る. 初めに向かった Retailer j にて商品を購入することができなければ, 確率 q_j でもう一方の小売業者に購入を試み, 確率 $1-q_j$ であきらめて自宅へ戻る. 2 つめの小売業者にて購入可能であれば, 商品を購入後自宅に戻る. 購入できない時には, Customer i は機会損失費用 s_i を被る. 顧客の合計数 n は小売業者および顧客には事前に知られているが, 各顧客の出発時間は未知であるとする. 顧客の目的は, 商品の価格, 移動, 購入できなかったことに対する機会損失, 小売業者に対する価値を考慮した期待総費用 C_c^i を最小にするような最初に訪れる小売業者の番号 y_i を購買行動を起こすか否かを含めて期首の時点で決定することである.

3 小売業者と顧客の目的関数

今, Retailer j $(j=1,2)$ に k_j 人の顧客が初めに向かうと仮定する. 需要量 n は既知であり, 小売業者は n より多くの量を発注すると維持費用が増加するため, Retailer j は発注量 z_j を $[0,n]$ に制限すること

ができる．解析上，考慮すべき領域を次のように分割して考える：

Case(1) $k_1 \le z_1 \le n, k_2 \le z_2 \le n$
Case(2) $0 \le z_2 < k_2, k_1 + (k_2 - z_2)q_2 \le z_1 \le n$
Case(3) $0 \le z_1 < k_1, k_2 + (k_1 - z_1)q_1 \le z_2 \le n$
Case(4) $0 \le z_2 < k_2, k_1 \le z_1 < k_1 + (k_2 - z_2)q_2$
Case(5) $0 \le z_1 < k_1, k_2 \le z_2 < k_2 + (k_1 - z_1)q_1$
Case(6) $0 \le z_1 < k_1, 0 \le z_2 < k_2$

3.1 小売業者の期待総費用関数の導出

今，Case(4) について考える．この状況では，Retailer 2 に向かった k_2 人の顧客のうち，z_2 人がそこで需要を満たされ，m_2 人が Retailer 2 から再配分されることにより Retailer 1 で満たされ，$(k_2 - z_2)q_2 - m_2$ 人が満たされず，$(k_2 - z_2)(1 - q_2)$ 人があきらめて戻る．そこで m_2 のとりうる値は $z_1 - k_1, \ldots, (k_2 - z_2)q_2$ である．Retailer 1 に向かった k_1 人の顧客のうち，$z_1 - m_2$ 人がそこで需要を満たされ，$k_1 - z_1 + m_2$ 人が満たされない．$k_1 - z_1 + m_2$ 人のうち，$(k_1 - z_1 + m_2)(1 - q_1)$ 人はあきらめて戻り，$(k_1 - z_1 + m_2)q_1$ 人は Retailer 2 へ向かうが需要を満たされることはない．このとき，小売業者の費用関数は

$$C_r^1 = c_1 z_1 - r_1 z_1 + p_1\{k_1 - z_1 + m_2 + (k_2 - z_2)q_2\}$$
$$C_r^2 = c_2 z_2 - r_2 z_2 + p_2\{k_2 - z_2 + (k_1 - z_1 + m_2)q_1\}$$

となる．m_2 の値は各顧客の出発時刻により決定するが，これらが未知であると仮定しているため，値を分布により確定することはできない．そこで本稿では，m_2 の値による $k_1 - z_1 + (k_2 - z_2)q_2 + 1$ 個の各状況がそれぞれ同様に確からしく起こると仮定して，費用関数の期待値により評価することとする．このとき，小売業者の期待費用関数は

$$C_r^1 = (c_1 - \tfrac{p_1}{2} - r_1)z_1 + \tfrac{p_1}{2}\{k_1 + 3(k_2 - z_2)q_2\}$$
$$C_r^2 = (c_2 - (1 + \tfrac{q_1 q_2}{2})p_2 - r_2)z_2 + \tfrac{p_2}{2}\{k_2(2 + q_1 q_2) + (k_1 - z_1)q_1\}$$

となる．他の Case でも同様に，各状況がそれぞれ等確率で起こると仮定して期待値を計算すると，以下の結果が得られる：

Case (1) $\quad C_r^1 = (c_1 + h_1)z_1 - (r_1 + h_1)k_1$
Case (2) $\quad C_r^1 = (c_1 + h_1)z_1 - (r_1 + h_1)(k_1 + (k_2 - z_2)q_2)$
$\qquad\qquad C_r^2 = (c_2 - p_2 - r_2)z_2 + p_2 k_2$
Case (6) $\quad C_r^1 = (c_1 - (1 + \tfrac{q_1 q_2}{2})p_1 - r_1)z_1 + p_1\{k_1(1 + \tfrac{q_1 q_2}{2}) + (k_2 - z_2)q_2(1 - \tfrac{q_2}{2})\} + \frac{p_1(1+q_2)q_2(k_2-z_2)\{(k_2-z_2)q_2+1\}}{2\{(k_1-z_1)q_1+(k_2-z_2)q_2+1\}}$

Case(3),(5) はそれぞれ Case(2),(4) において小売業者の役割を交換した関数となる．また，Case(1),(6) の C_r^2 は C_r^1 と同じ形となる．

3.2 顧客の期待総費用関数の導出

次に，顧客の目的関数について考える．本稿では，顧客の行動パターンが 4 通り存在し，各パターンでの顧客の総費用関数は次のようになる：

(1) Customer i が Retailer j を最初に訪問して購入できる場合

$$C_c^i = 2d_i\lambda_{ij} + r_j + e_{ij}$$

(2) Customer i は最初 Retailer j' に向かうが，そこでは購入できず，他方の Retailer $j(\neq j')$ によって満たされる場合

$$C_c^i = d_i(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda) + r_j + e_{ij}$$

(3) Customer i は最初 Retailer j' に向かうが，そこでは購入できず，他方の Retailer $j(\neq j')$ でも購入できないことを知ってあきらめる場合

$$C_c^i = 2d_i\lambda_{ij} + e_{ij} + s_i$$

(4) 購入しない場合

$$C_c^i = s_i$$

今，Case(2) について顧客の期待総費用関数を考える．

(I) Customer i が Retailer 1 を選択したとする．このとき，Customer i は Retailer 1 によって需要を満たされる．ゆえに，期待総費用は

$$C_c^i = 2d_i\lambda_{i1} + r_1 + e_{i1}$$

となる．

(II) Customer i が Retailer 2 を選択したとする．このとき，Retailer 2 に向かった k_2 人の顧客のうち，z_2 人がそこで需要を満たされ，$(k_2 - z_2)(1 - q_2)$ 人はその時点であきらめ，$(k_2 - z_2)q_2$ 人が再配分により Retailer 1 で満たされることになる．顧客の出発時刻に関する分布が未知であるため，Customer i がどちらの集合に含まれるのかわからない．そこで，本稿では，顧客の到着順は同様に確からしいと仮定することにより，期待値をとることにする．従って，期待総費用は

$$C_c^i = \tfrac{z_2}{k_2}\{2d_i\lambda_{i2} + r_2 + e_{i2}\} + \tfrac{(k_2-z_2)q_2}{k_2}\{d_i(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda) + r_1 + e_{i1}\}$$
$$+\tfrac{(k_2-z_2)(1-q_2)}{k_2}\{2d_i\lambda_{i2} + e_{i2} + s_i\}$$

となる．

(III) 購買行動に移らなかったとき，

$$C_c^i = s_i$$

である．

他の場合についても，各状況が起こる確率および顧客の到着順については同様に確からしい確率で起こると仮定し，期待値を評価関数として用いる．

4 平衡解析とその結果

まず，小売業者に対する平衡解析を行なう．顧客の行動の組 $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ と任意の z_1, z_2 に対して次の２つの不等式を満たす小売業者の政策対 (z_1^*, z_2^*) を求める．

$$C_r^1(z_1^*, z_2^*, y_1^*, \ldots, y_n^*) \leq C_r^1(z_1, z_2^*, y_1^*, \ldots, y_n^*)$$
$$C_r^2(z_1^*, z_2^*, y_1^*, \ldots, y_n^*) \leq C_r^2(z_1^*, z_2, y_1^*, \ldots, y_n^*)$$

前節で述べた６つの領域のうち，Case(1),(2) において $\frac{\partial C_r^1}{\partial z_1} > 0$，Case(3)-(6) において $\frac{\partial C_r^1}{\partial z_1} < 0$ が得られる．また，Case(1),(3) において $\frac{\partial C_r^2}{\partial z_2} > 0$，その他の Case においては $\frac{\partial C_r^2}{\partial z_2} < 0$ が得られる．これらにより，次の結果が得られる．

命題 1. 与えられた顧客の行動政策の組 $(y_1^*, \ldots, y_n^*)$ に対する小売業者の平衡戦略は $(z_1^*, z_2^*) = (k_1, k_2)$ である．

これは各小売業者は再配分された顧客かどうかに関係なく，初めに向かってくる顧客の数だけ商品を発注すればよいことを示している．

次に，顧客に対する平衡解析を行なう．小売業者の平衡戦略が $(z_1^*, z_2^*) = (k_1, k_2)$ と決定されたので，$k_1 \leq z_1 < n, k_2 \leq z_2 < k_2 + 1$ の範囲における顧客の期待総費用関数を用いて平衡点を導く．

今，Customer i 以外の他の $n-1$ 人のうち，$k_1 - 1$ 人が Retailer 1 を，k_2 人が Retailer 2 を選択した

とする．このとき，Customer i の期待総費用関数は

$$C_c^i = \begin{cases} 2d_i\lambda_{i1} + r_1 + e_{i1}, & y_i = 1 \\ \frac{z_2}{k_2+1}\{2d_i\lambda_{i2} + r_2 + e_{i2}\} + \frac{(k_2-z_2+1)q_2}{k_2+1}\{d_i(\lambda_{i1} + \lambda_{i2} + \lambda) + r_1 + e_{i1}\} & \\ +\frac{(k_2-z_2+1)(1-q_2)}{k_2+1}\{2d_i\lambda_{i2} + e_{i2} + s_i\}, & y_i = 2 \\ s_i, & y_i = 0 \end{cases}$$

となる．命題 1 の結果を代入し，これらの値を比較することにより，Customer i は $y_i = 2$ を選ぶべきか否かを決定することができる．各顧客においてこれを行なうと，我々が求めるモデルの平衡点が得られる．

5 最後に

本稿では，単一の商品を販売する 2 つの小売業者と購買意欲が低い顧客を含む顧客間における行動戦略に関する数理的モデルを提案した．各状況において起こりうる確率が同様に確からしく，コスト関数が線形であるため，小売業者における平衡解析で容易な結果が得られた．もちろんこれらの構造が複雑化すると，このような単純な解を得ることはできなくなる．

参考文献

[1] R.J.Aumann, Existence of competitive equilibria in markets with a continuum of traders, *Econometrica*, **34**, 1–17, (1966).

[2] J.Bryant, Competitive equilibrium with price setting firms and stochastic demand, *International Economic Review*, **21**, 619–626, (1980).

[3] G.Cachon and M.Lariviere, Capacity choice and allocation: strategic behavior and supply chain performance, *Management Science*, **45**, 1091–1108, (1999).

[4] G.D.Eppen, Effect of centralization on expected cost in a multi-location newsboy problem, *Management Science*, **25** 498–501, (1979).

[5] D.P. Heyman and M.J. Sobel, *Stochastic Models, Handbooks in Operations Research and Management Science* **2**, Elsevier Science Publishers, North-Holland, (1990).

[6] H. Hohjo and Y. Teraoka, On a competitive inventory model with a customer's choice probability, *Journal of the Operations Research Society of Japan*, **43** (3), 355–364, (2000).

[7] H. Hohjo, A competitive inventory model with the customer's general choice probability, *Computers & Mathematics with Applications*, **41** (3-4), 523–530, (2001).

[8] H. Hohjo and Y. Teraoka, A duopolistic inventory problem including the possibility that the customers give up purchasing the merchandise, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, **55** (2), 361–367, (2002).

[9] H. Hohjo and Y. Teraoka, A competitive inventory model with reallocation on a plane Market, *Mathematical and Computer Modelling*, **38** (11-13), 1191–1201, (2003).

[10] H.Hohjo, Y.Teraoka, Nash Equilibrium for Three Retailers in an Inventory Model with a Fixed Demand Rate, *Recent Advances in Stochastic Operations Research*, (Eds.) T.Dohi, S.Osaki, K.Sawaki, World Scientific, 265–276, (2007).

[11] H.Hohjo, A competitive Inventory Problem Between Two Retailers to Customers with Uncertain Departure Time, *Proceedings of the 11th Czech-Japan Seminar on Data Analysis and Decision Making under Uncertainty*, Sendai, 123–128, (2008).

[12] S.A.Lippman and K.F.McCardle, The competitive newsboy, *Operations Research*, **45** (1), 54–65, (1997).

[13] L.Montrucchio, M.Scarsini, Large Newsvendor Games, International Centre for Economic Research Working paper **30**, 1–25, (2005).

[14] A.Müller, M.Scarsini, M.Shaked, The newsvendor game has a nonempty core, *Games Economic Behavior*, **38**, 118–126, (2002).

[15] S.Netessine, N.Rudi, Centralized and competitive inventory models with demand substitution, *Operations Research*, **51**, 329–335, (2003).

[16] M.Parlar, Game theoretic analysis of the substitutable product inventory problem with random demands, *Naval Research Logistics*, **35**, 397–409, (1988).

[17] N.C.Petruzzi and M.Dada, Pricing and the newsvendor problem: a review with extensions, *Operations Research*, **47**, 183–194, (1999).

[18] M.Slikker, J.Fransoo, M.Wouters, Cooperation between multiple news-vendors with transshipments, *European J. Oper. Res.*, **167**, 370–380, (2005).

[19] Q.Wang, M.Parlar, A three-person game theory model of the substitutable product inventory problem with random demands, *European Journal of Operational Research*, **76**, 83–97, (1994).